Kap 02

Det 0.te ufullstendighetsteoremet

Vi ser på teorier K for par som tilfredsstiller følgende

1. Alle sanne Δ_0-setninger er utledbare i K
2. I K kan vi bare utlede sanne setninger
3. Utledbarhet i K er et Σ_1-utsagn

Her er betingelsene 1 og 3 høyst rimelige, mens vi skal senere se at vi kan stille spørsmål ved hvor lett det er å få teorier til å tilfredsstille 2. Dette blir bedre behandlet ved de andre ufullstendighetsteoremene.

Teorem. Det fins sanne Π_1-setninger som ikke er utledbare i K.

Vi bruker at stoppeproblemet er uavgjørbart. Gitt et program og inngangsdata. Da er spørsmålet om programmet stopper et spørsmål om en Σ_1-setning, $\exists x.Px$, er sann eller usann. Da har vi følgende:

- $\exists x.Px$ er sann hvis og bare hvis den er utledbar i K
- Om $\neg\exists x.Px$ er utledbar i K, så er den sann

Men det vil alltid være program og inngangsdata slik at for dem vil $\neg\exists x.Px$ være sann uten at vi kan utlede det i K. Ellers vil vi kunne avgjøre stoppeproblemet ved følgende

- Om $\exists x.Px$ er utledbar, så stopper programmet
- Om $\neg\exists x.Px$ er utledbar, så stopper ikke programmet

Som avgjørelsesprosedyre kunne vi ha simultant undersøkt om $\exists x.Px$ eller $\neg\exists x.Px$ var utledbar. Men slik avgjørelsesprosedyre finnes ikke, og vi kan konkludere at det fins programmer og inngangsdata som ikke stopper og den tilsvarende Π_1-setningen er sann men ikke utledbar i K.

Legg merke til at det er ytterst få krav til den ufullstendige teorien K. For å skjønne mer om hva som foregår skal vi se nærmere på noen aktuelle teorier.

4 ulike teorier for par

- **MIN** – den minimale teorien. Alle sanne Δ_0-setninger som aksiomer.
- **Robinson teori** – litt utvidelse av **MIN** men med endelig antall aksiomer.
- **Predikativ induksjon** – Robinson teori + induksjon over Σ_1-formler
- **Full induksjon** - Robinson teori + induksjon over alle formler

Vi kan se på Δ_0-setninger som elementære regnestykker, og **MIN** sier bare noe om disse. Den har ikke med noen overordnete egenskaper for par. I Robinsons teori har vi med følgende 5 setninger som aksiomer (vi skriver ikke opp $\forall$-kvantorene ytterst som binder de frie variablene)

1. $\neg$ nil = (x . y)
2. (x . y) = (u . v) $\leftrightarrow$ x=u $\wedge$ y=v
3. x = nil $\vee$ $\exists$u,v . x = (u . v)
4. $\neg$ x < nil
5. x < (u . v) $\leftrightarrow$ x = u $\vee$ x < u $\vee$ x = v $\vee$ x < v

Her gir 1,2,4,5 nok informasjon til at vi kan regne på konkrete par – finne ut om de er = eller < . Aksiom 3 er det mest interessante. Den sier i datastrukturen par så finnes det bare to typer elementer – enten nil eller bygd opp som par (u . v) .

Det er ikke så vanskelig, men noe omstendelig å vise at i Robinsons teori kan vi utlede alle sanne Δ_0-setninger.

Med induksjon tenker vi på datastrukturen som noe som er bygd opp nedenfra. For hver formel får vi et nytt induksjonsaksiom som

$$\text{F nil} \wedge \forall x,y\,(\text{Fx} \wedge \text{Fy} \rightarrow \text{F}(x.y)) \rightarrow \forall z\,.\,\text{Fz}$$

Skillet mellom predikativ induksjon og full induksjon kan vi tenke oss som:

- Predikativ induksjon – potensiell uendelighet . På hvert trinn er det bare et endelig antall par som blir berørt
- Full induksjon – aktuell uendelighet. Kan ha kvantorer over samtlige par.

Uavgjørbarhet av 1.ordens logikk

Robinsons teori har bare et endelig antall aksiomer. Det gjør at vi kan erstatte utledbarhet i Robinsons teori med utledbarhet i 1.ordens logikk. For å avgjøre om program stopper kunne vi ha undersøkt

- Om R1 $\wedge$ R2 $\wedge$ R3 $\wedge$ R4 $\wedge$ R5 $\rightarrow$ $\exists$x.Px er utledbar, så stopper programmet
- Om R1 $\wedge$ R2 $\wedge$ R3 $\wedge$ R4 $\wedge$ R5 $\rightarrow$ $\neg\exists$x.Px er utledbar, så stopper ikke programmet

Og det vet vi at ikke lar seg gjøre. Vi kan ikke avgjøre om setninger i 1.ordens logikk er utledbare eller ikke.

Fins det andre teorier for par?

Selvfølgelig finnes det slike? Fra ufullstendighetsteoremet så har vi en hel hærskare. Om vi har en teori, så vil det finnes en sann Π_1-setning som ikke er med i teorien. Den kan vi jo legge til som et ekstra aksiom, og så fortsette videre. Men de 4 teoriene er de som stadig dukker opp – og er de som vi vil se nærmere på. I Robinsons teori er følgende setning ikke utledbar selv om den er sann

$$\forall x\,.\,\neg\, x = (x\,.\,x)$$

Det kan vi vise direkte. Det finnes slike setninger i de sterkere teoriene også, men det er mye vanskeligere å vise. Dette kommer vi tilbake til.